Roll No. .....

E–3570

B. Sc. (Part I) EXAMINATION, 2021

(New Course)

MATHEMATICS

Paper Third

(Vector Analysis and Geometry)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Solve any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) यदि a, b, c कोई तीन सदिश हों तो सिद्ध कीजिए कि :

$$[a+b \quad b+c \quad c+a] = 2[a \quad b \quad c]$$

If a, b, c be any three vectors then prove that :

$$[a+b \quad b+c \quad c+a] = 2[a \quad b \quad c]$$

(ब) $\phi = x^2yz + 4xz^2$ का दिक् अवकलज बिन्दु $(1, -2, -1)$ पर $2i - j - 2k$ की दिशा में ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of :

$$\phi = x^2yz + 4xz^2$$

in the direction of the vector $2i - j - 2k$ at the point $(1, -2, -1)$.

(स) यदि a एक अचर सदिश है, तो दर्शाइये :

(i) $\text{div } (a \times \bar{r}) = 0$

(ii) $\text{curl } (a \times \bar{r}) = 2a$

If a is a constant vector, then show that :

(i) $\text{div } (a \times \bar{r}) = 0$

(ii) $\text{curl } (a \times \bar{r}) = 2a$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) $\int_C F.dr$ का मूल्यांकन कीजिए जहाँ :

$$F = (x^2 + y^2)\, i - 2xyj$$

तथा C, xy समतल में एक आयत है जो $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ से घिरा है।

Evaluate $\int_C F.dr$ where :

$$F = (x^2 + y^2)\, i - 2xyj$$

and C is the rectangle in xy plane bounded by $x = 0, x = a, y = 0, y = b$.

(ब) स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जब :

$$F = yi + zj + xk$$

तथा पृष्ठ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का xy समतल के ऊपर का भाग है।

Verify Stokes' theorem when :

$$F = yi + zj + xk$$

and surface S is part of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above xy-plane.

(स) $\iint_S \vec{F} . \vec{n}\, dS$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ :

$$F = 4xzi - y^2 j + 4zk$$

तथा S घन का पृष्ठ है, जो कि समतलों $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ से घिरा हुआ है।

Evaluate :

$$\iint_S \vec{F} . \vec{n}\, dS$$

where :

$$F = 4xzi - y^2 j + 4zk$$

and S is the surface of the cube bounded by the plane $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) शांकव का अनुरेखण कीजिए :

$$21x^2 - 6xy + 29y^2 + 6x - 58y - 151 = 0$$

Trace the conic :

$$21x^2 - 6xy + 29y^2 + 6x - 58y - 151 = 0$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि समीकरण :

$$\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$$

तथा $$\frac{l}{r} = -1 - e\cos\theta$$

एक ही शांकव को निरूपित करते हैं।

Prove that the equations :

$$\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$$

and $$\frac{l}{r} = -1 - e\cos\theta$$

represent the same conic.

(स) शांकव :

$$x^2 + 2y^2 = 2$$

से सनाभि शांकव का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 1) से होकर जाता है।

Find the conic confocal with the conics :

$$x^2 + 2y^2 = 2$$

which passes through the point (1, 1).

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) और आधार वक्र $ax^2 + by^2 = 1,\ z = 0$ ।

Find the equation of cone whose vertex is (α, β, γ) and base :

$$ax^2 + by^2 = 1,\ z = 0.$$

(ब) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखा :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

के समान्तर है तथा आधार वक्र :

$$x^2 + 2y^2 = 1, \; z = 0$$

है।

Find the equation of a cylinder whose generators are parallel to the line :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

and the base curve is :

$$x^2 + 2y^2 = 1, \; z = 0.$$

(स) उस लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 है तथा अक्ष रेखा :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$$

रखता है।

Find the equation of right circular cylinder whose radius is 2 and axis is the line :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जब समतल $lx + my + nz = 1$, सकेन्द्र शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का स्पर्श तल है।

To find the condition when the plane $lx + my + nz = 1$ becomes a tangent plane to the conicoid :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

(ब) दर्शाइये कि पृष्ठ :

$$4z + 2x + xy = a^2$$

का समतल $lx + my + nz = p$ द्वारा प्रतिच्छेद एक परवलय होगा यदि

$$\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0 .$$

Show that the intersection of the surface :

$$4z + 2x + xy = a^2$$

by the plane $lx + my + nz = p$ will be a parabola if :

$$\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0 .$$

(स) अतिपरवलयज :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

को बिन्दु (2, 3, – 4) से जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation to the generating line of hyperboloid :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

which passes through the point (2, 3, – 4).